



Bosna i Hercegovina
Federacija Bosne i Hercegovine
SREDNJOBOSANSKI KANTON / KANTON SREDIŠNJA BOSNA
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, MLADIH, KULTURE I SPORTA
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, ZNANOSTI, MLADIH, KULTURE I ŠPORTA

KURIKULUM NASTAVNOG PREDMETA

ODABRANE OBLASTI
MATEMATIKE

ZA MATEMATIČKO-INFORMATIČKU GIMNAZIJU

Travnik, august 2025.



Bosna i Hercegovina
Federacija Bosne i Hercegovine
SREDNJOBOSANSKI KANTON / KANTON SREDIŠNJA BOSNA
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, MLADIH, KULTURE I SPORTA
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, ZNANOSTI, MLADIH, KULTURE I ŠPORTA

KURIKULUM NASTAVNOG PREDMETA

ODABRANE OBLASTI MATEMATIKE

ZA MATEMATIČKO-INFORMATIČKU GIMNAZIJU

Travnik, august 2025.

Kurikulum nastavnog predmeta Odabrane oblasti matematike

Izdavač: Ministarstvo obrazovanja, nauke, mladih, kulture i sporta Srednjobosanskog kantona / Ministarstvo obrazovanja, znanosti, mladih, kulture i sporta Kantona Središnja Bosna

Za izdavača: Bojan Domić, ministar

Recenzent:

Dr. sc. Naida Bikić

Stručni tim za razvijanje, prilagođavanje i inoviranje predmetnih kurikuluma i njihovu primjenu u osnovnim i srednjim školama na području Srednjobosanskog kantona u kojima se nastavni proces realizira na bosanskom jeziku:

Nezira Fuško, prof., voditeljica Stručnog tima

Ermina Musić, prof., voditeljica/članica radne grupe

Iva Stanić, administrator online platforme

Lektor:

Dr. sc. Nermin Šušić

Tehnička priprema i uređenje:

Dr. sc. Nevzudin Buzadžija

SADRŽAJ

A/ OPIS PREDMETA	4
B/ CILJEVI UČENJA I PODUČAVANJA PREDMETA	6
C/ OBLASNA STRUKTURA PREDMETNOG KURIKULUMA	7
D/ ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHODI.....	11
1. razred	11
2. razred	16
3. razred	20
4. razred	24
E/ UČENJE I PODUČAVANJE.....	30
F/ VREDNOVANJE U PREDMETNOM KURIKULUMU	34
G/ PROFIL I STRUČNA SPREMA NASTAVNIKA.....	37

A/ OPIS PREDMETA

Predmet Odabrane oblasti matematike doprinosi dubljem razumijevanju ključnih koncepata više matematike, koji nisu obuhvaćeni redovnim kurikulumom matematike i razvija sposobnost primjene apstraktnih matematičkih ideja u rješavanju složenih i netipičnih problema. Kroz rad na različitim matematičkim oblastima - od matematičke logike, teorije skupova i algebarskih struktura, preko teorije brojeva, kombinatorike, geometrije i analize, pa sve do savremenih tema poput teorije grafova, teorije informacija i teorije igara - učenici proširuju svoje matematičko znanje i osposobljavaju se za samostalno istraživanje i dublje matematičko promišljanje. Tako se doprinosi njihovom intelektualnom razvoju, pripremi za akademske studije matematike, informatike, prirodnih i tehničkih nauka, te ih osposobljava za učešće u matematičkim takmičenjima i istraživačkim projektima.

Matematičko znanje igra važnu ulogu u razumijevanju sadržaja iz prirodnih i društvenih nauka, umjetnosti i tehnologije. Njeno izučavanje razvija i vrijednosti kao što su strpljenje, dosljednost, urednost i znatiželja. Matematika razvija matematičku pismenost koja je presudna za pojedinca da živi efikasnijim životom kao konstruktivan, aktivan i odgovoran građanin. Razumijevanje ključnih matematičkih pojmova olakšava snalaženje u modernoj svakodnevici.

Podučavanjem ovog predmeta kod učenika se razvijaju vrijednosti poput upornosti, preciznosti, odgovornosti, strpljenja i intelektualne radoznalosti. Učenici jačaju sposobnost logičkog i kritičkog mišljenja, samostalnog zaključivanja, matematičkog izražavanja i rješavanja problema. Podstiče se timski rad, argumentacija vlastitih ideja, kao i poštovanje tuđih pristupa i strategija, čime se razvijaju komunikacijske i socijalne kompetencije u kontekstu matematičkog mišljenja.

Podučavanje ovog predmeta doprinosi razvoju osposobljenih, odgovornih i mislećih pojedinaca koji su spremni da se suoče sa složenim problemima savremenog društva. Učenici kroz predmet uče kako učiti, kako analizirati, zaključivati i kako svoje znanje primijeniti u novim i nepoznatim situacijama.

Nastava omogućava razvoj više ključnih kompetencija: matematičke pismenosti, kompetencije rješavanja problema, digitalne kompetencije (kroz upotrebu softverskih alata za simboličke proračune, logičko modeliranje i simulacije), kao i kompetencije za učenje, komunikaciju i saradnju.

Predmet razvija brojne predmetno specifične kompetencije, kao što su: razumijevanje formalnih matematičkih struktura i dokaza, sposobnost apstraktnog i deduktivnog mišljenja, povezivanje različitih matematičkih oblasti, prepoznavanje i modeliranje problema korištenjem matematičkog jezika i simbola, sposobnost argumentacije i analize tačnosti rješenja.

Uloga predmeta je važna i u realizaciji međupredmetnih tema i često preduvjet za proučavanje pojava i zakonitosti u raznim nastavnim predmetima kao što je npr. STEM grupa predmeta (fizika, hemija, biologija, geografija, osnovi tehnike, tehnička kultura, informatika, matematika), filozofija sa logikom, ekonomija, likovna kultura, muzička kultura, moja okolina,...

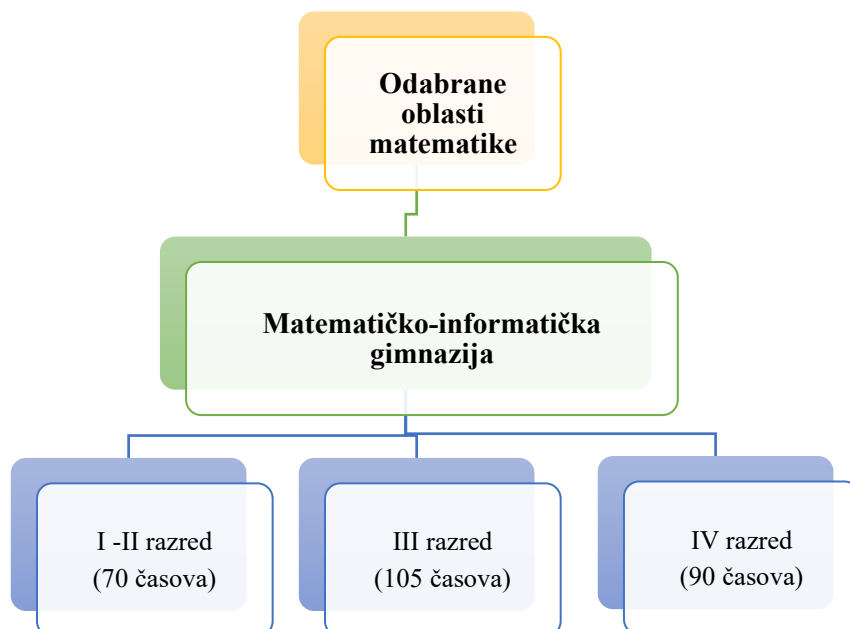
Odabrane oblasti matematike, kao i predmet Matematika, pripada matematičkom odgojno-obrazovnom području koje je jedno od osam područja definisanih Zajedničkom jezgrom nastavnih planova i programa definisanih na ishodima učenja.

Učenje i podučavanje Odabranih oblasti matematike temelji se na problemskom pristupu, istraživačkom učenju i aktivnoj participaciji učenika. Učenici se podstiču na postavljanje hipoteza, izvođenje zaključaka, dokazivanje tvrdnji i kritičko preispitivanje matematičkih ideja. Nastava se odvija kroz individualni i timski rad, diskusije, mini-projekte i upotrebu digitalnih alata, što omogućava razvoj samostalnosti, odgovornosti i dubljeg razumijevanja.

Nastavnik ima ulogu facilitatora, mentora i vodiča kroz kompleksnije matematičke sadržaje, prilagođavajući metode i tempo rada interesima i sposobnostima učenika. Posebna pažnja posvećuje se povezivanju matematičkih pojmova s drugim predmetima i kontekstima, kao i razvoju metakognitivnih vještina učenika – kako da planiraju svoje učenje, procijene vlastiti napredak i efektivno primijene stečena znanja u novim situacijama.

Posebna pažnja posvećena je i razvoju sposobnosti matematičkog modeliranja - procesa u kojem učenici identifikuju realne probleme, postavljaju matematički model koristeći odgovarajuće pretpostavke, rješavaju ga i interpretiraju rezultate u kontekstu stvarnih situacija. Kroz modeliranje, učenici razvijaju ne samo matematičke, već i metakognitivne, komunikacijske i istraživačke vještine, koje su ključne za uspjeh u daljem obrazovanju i svakodnevnom životu. Učenici se podstiču da koriste modeliranje u rješavanju problema iz fizike, informatike, ekonomije, biologije i drugih oblasti, čime se dodatno jača međupredmetna povezanost i funkcionalnost matematičkog znanja.

Odabrane oblasti matematike je obavezan nastavni predmet koji se izučava u svim razredima matematičko-informatičke gimnazije.



Grafikon 1. Godišnji fond nastavnih časova u predmetnom kurikulumu Odabrane oblasti matematike

B/ CILJEVI UČENJA I PODUČAVANJA PREDMETA

1. Ovladati jezikom matematike i različitim prikazima matematičkih informacija, kroz pravilno interpretiranje, predstavljanje i izražavanje matematičkih ideja, korištenje univerzalne terminologije, simbola, formula i dijagrama, te razvijati vještinu argumentovanog zaključivanja i dokazivanja.
2. Razvijati logičko, kreativno i kritičko mišljenje, kroz analizu i rješavanje problemskih situacija, primjenu matematičkih pojmova u različitim kontekstima, postavljanje hipoteza i izvođenje zaključaka, uz razvijanje sposobnosti identifikovanja struktura i obrazaca.
3. Primjenjivati matematičko znanje i vještine na realne i apstraktne situacije, kroz rješavanje složenih zadataka i matematičko modeliranje, pri čemu učenici razvijaju sposobnost analize, interpretacije rezultata i evaluacije modela uz upotrebu digitalnih alata i tehnologije.
4. Razvijati pozitivan odnos prema matematici i učenju uopće, kroz stjecanje radnih navika i osobina kao što su tačnost, urednost, odgovornost, istrajnost i preciznost, te njegovanje znatiželje i interesa za nauku, logiku i rješavanje problema.
5. Uočavati veze matematike s drugim naukama i svakodnevnim životom, razvijajući razumijevanje matematičkih koncepata kao temelja prirodnih i tehničkih nauka, društvenih fenomena i savremenih tehnologija, te kao alata za funkcionalno i efikasno djelovanje u društvu.

C/ OBLASNA STRUKTURA PREDMETNOG KURIKULUMA

Odabrane oblasti matematike je kao predmet u osnovi naučna disciplina matematike, te razvija logičko i analitičko mišljenje, rješavanje problema i primjenu stečenih znanja u svakodnevnom životu. Nastava Matematike, pa i ovog predmeta je zasnovana na Zajedničkoj jezgri nastavnih planova i programa i strukturirana je kroz četiri glavne oblasti:

- 1. Skupovi, brojevi i operacije,**
- 2. Algebra,**
- 3. Geometrija i mjerenja,**
- 4. Podaci i vjerovatnoća.**

Svaka od ovih oblasti obuhvata specifične matematičke koncepte i vještine koje se postepeno nadograđuju, omogućavajući učenicima da razvijaju matematičku pismenost i sposobnost kritičkog mišljenja.

Oblasne strukture matematike omogućavaju učenicima da postepeno razvijaju matematičke vještine kroz sistematsko usvajanje koncepata i njihovih primjena. Ove četiri oblasti međusobno su povezane i čine osnovu matematičkog obrazovanja, pripremajući učenike za izazove savremenog društva i buduće karijere u STEM oblastima.

A. Skupovi, brojevi i operacije

Oblast Skupovi, brojevi i operacije predstavlja temelj matematičke pismenosti. Bliska povezanost ove oblasti sa ostalim posljedicama je primjene brojeva u svim područjima ljudske djelatnosti, što je ujedno povezuje s ostalim područjima kurikuluma i svakodnevnim životom.

Postepeno formiranje apstraktnih pojmova kao što su broj, brojevni sistem i skup, te razvijanje vještina izvođenja aritmetičkih postupaka, postiže se izučavanjem ove oblasti.

Formiranjem pojma prirodnog broja i skupa prirodnih brojeva, uz primjenu osnovnih računskih operacija, učenici otkrivaju potrebu proširivanja tog skupa. Postepeno se upoznaju skupovi cijelih, racionalnih, iracionalnih, realnih i skup kompleksnih brojeva. Analiziraju se i tumače osobine i odnosi među brojevima, primjenjuju se različiti načini zapisivanja i prikazivanja brojeva te usvajaju i upotrebljavaju sve složenije računske operacije. Vještine usmenog i pismenog računanja se postupno razvijaju uz upotrebu osnovnih osobina i međusobnih veza računskih operacija. To ujedno doprinosi razvijanju vještina djelotvornog i sigurnog računanja.

Matematičke probleme i probleme iz svakodnevnog života moguće je riješiti izvođenjem odgovarajućih aritmetičkih postupaka, predviđanjem rezultata i procjenom smislenosti rezultata uz mogućnost upotrebe različitih metoda i računarske tehnologije u svrhu efikasnosti i tačnosti.

Ova oblast obuhvata dvije komponente i to:

- 1. Skupovi, brojevi i brojevni sistemi,**
- 2. Računske operacije.**

B. Algebra

Algebra je ujedinjujuća nit gotovo svih područja matematike. Njome modelujemo određene probleme iz realnog svijeta i rješavamo ih pomoću algebarskih zakonitosti. Čini osnovu za učenje matematičkog jezika proučavajući pravilnosti i koristeći simbole umjesto brojeva. Zbog toga algebra uveliko pomaže pri rješavanju zadataka koji obuhvataju: opisivanje pravilnosti u kojima slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije; uočavanje nepoznatih i rješavanje jednačina i nejednačina pomoću odgovarajućih algebarskih zakonitosti; područje koje se bavi algebarskim strukturama ili skupovima u kojima je definisana jedna ili više operacija pomoću kojih se elementi skupa kombinuju u nove elemente istog skupa. Jezikom algebre učenici: opisuju, definišu, tumače uzorke, odnose i funkcije, analiziraju matematičke situacije i strukture korištenjem algebarskih simbola, koriste matematičke modele za predstavljanje i razumijevanje kvantitativnih odnosa i tumače ih u datom kontekstu.

Ova oblast obuhvata tri komponente:

- 1. Algebarski izrazi, funkcije, proporcije i primjena,**
- 2. Jednačine, nejednačine i njihovo predstavljanje,**
- 3. Elementi logike.**

C. Geometrija i mjerenja

Geometrija je oblast matematike koja se bavi proučavanjem osobina i međusobnih odnosa prostornih oblika, tj. geometrijskih tijela, geometrijskih likova, linija i tačaka. Kao oblast matematike, geometrija se veže sa svim granama matematike i ima važnu ulogu u svakodnevnom životu. Izučavanje geometrijskih oblika te njihovo zapažanje u prostoru oko nas povoljno utiče na razvoj geometrijskog mišljenja i sposobnost vizuelizacije koji su bitni za razumijevanje matematike kao i ostalih nastavnih predmeta. Geometrija nudi mogućnosti za razvoj različitih oblika zaključivanja kroz mnoštvo zanimljivih, vizuelnih i mjerljivih geometrijskih veza. Izometrijske transformacije su preslikavanja koja čuvaju podudarnost. Susrećemo ih u svakodnevnom životu (hodanje, kretanje lifta, obrtanje Zemlje oko svoje ose, i dr.). Mjerenje je postupak određivanja vrijednosti neke mjerne veličine. Direktnim mjerenjem upoređuje se mjerena veličina s istovrsnom uporednom veličinom, takozvanom mjernom jedinicom.

Oblast geometrije obuhvata dvije komponente:

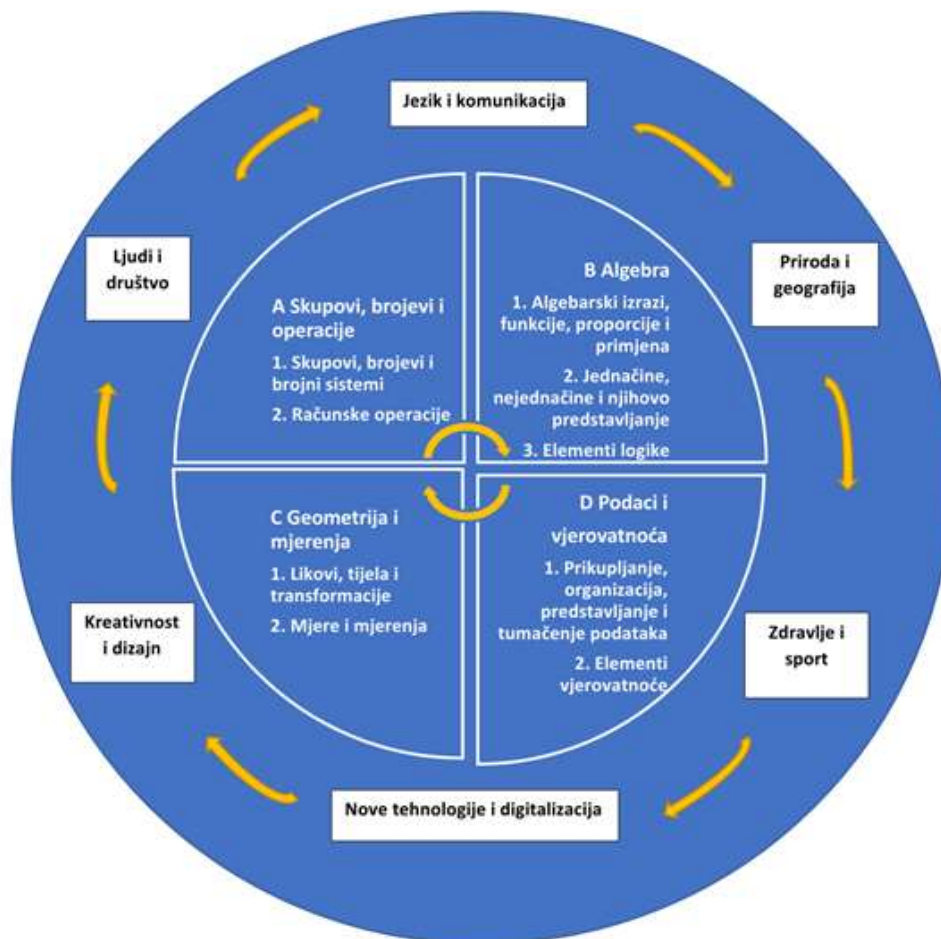
- 1. Figure u ravni i prostoru (likovi i tijela), transformacije,**
- 2. Mjere i mjerenja.**

D. Podaci i vjerovatnoća

Sadržaji iz oblasti Podaci i vjerovatnoća uvode se postupno, te se polahko grade veze sa sadržajima ostalih matematičkih oblasti. Učenici prepoznaju relevantne podatke, analiziraju ih i predstavljaju na najefikasniji način, po mogućnosti uz korištenje savremenih računarskih alata. Nakon uočavanja veza između podataka i posmatrajući učestalost pojavljivanja, dolazi se do pojma vjerovatnoće. Koristeći eksperimentalni i teorijski pristup, učenici postupno razvijaju sofisticiraniju sposobnost kritičke procjene podataka, s ciljem prognoze događaja i razvijanja intuicije u donošenju odluka u različitim oblastima.

Ova oblast obuhvata dvije komponente:

1. Prikupljanje, organizacija, predstavljanje i tumačenje podataka,
2. Elementi vjerovatnoće.



Grafikon 2. Oblasna struktura predmetnog kurikulumu Odabrane oblasti matematike

U nastavku slijedi dio koji se odnosi na odgojno-obrazovne ishode koji su okosnica predmetnog kurikulumu Odabrane oblasti matematike i razrađeni su za svaku od četiri oblasti (domene) na kojima se temelji: A/ Skupovi, brojevi i operacije, B/ Algebra, C/ Geometrija i mjerenja i D/ Podaci i vjerovatnoća.

Odgojno-obrazovni ishodi pomažu nastavnicima u praćenju napretka učenika i u vrednovanju učeničkih postignuća. Tokom pripremanja procesa učenja i podučavanja nastavnik treba povezati odgojno-obrazovne ishode sa sadržajima navedenim u kurikulumu i metodama podučavanja.

U tabelama su odgojno-obrazovni ishodi označeni šiframa. Skraćenice poput A.I.1. ili B.III.2. i sl. označavaju redom: oblast kojoj ishod pripada (A/ Brojevi, skupovi i operacije, B/ Algebra, C/ Geometrija i mjerenja, D/ Podaci i vjerovatnoća), godinu podučavanja predmeta (I - prvi razred, II - drugi razred, III - treći razred i IV - četvrti razred), te redni broj odgojno-

obrazovnog ishoda koji se podučava u sklopu navedene oblasti (1. - prvi ishod, 2. - drugi ishod i dalje).

Skraćenice MTP-1.1.2. ili MTP-2.3.1. označavaju poveznice sa Zajedničkom jezgrom nastavnih planova i programa za matematičko područje definiranoj na ishodima učenja, odakle su ishodi dijelom ili u potpunosti preuzeti.

Pojedini ishodi učenja se ostvaruju realizacijom sadržaja iz više oblasti matematike (unutarpredmetna korelacija), a i u korelaciji sa sadržajima drugih nastavnih predmeta (međupredmetna korelacija).

D/ ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHODI

1. razred /2 časa sedmično/70 časova godišnje/

Oblast: A/ Skupovi, brojevi i operacije	
Ishod učenja	Razrada ishoda
A.I.1. Analizira osnovne pojmove teorije skupova, te primjenjuje relacije i funkcije i njihove osobine.	• Razumije pojmove podskupa, komplementa i partitivnog skupova. • Primjenjuje binarne operacije i recipročne relacije. • Ispituje relacije ekvivalencije i relacije poretka. • Određuje faktorski skup. • Ispituje surjekciju, injekciju i bijekciju. • Primjenjuje relacije preslikavanja i njihove osobine. • Proširuje i ograničava funkciju. • Formira kompoziciju funkcija. • Primjenjuje Dirihleov princip u kombinatoričkim problemima
Poveznice sa ZJNPP	MTP-1.2.1. , 1.1.1.
Ključni sadržaji	
- Jednakost skupova, podskup, partitivni skup, komplementni skupovi. - Binarne operacije i recipročne relacije. - Relacija ekvivalencije i poretka, faktorski i indeksirani skupovi. - Preslikavanje (funkcija). - Inverzna preslikavanja. - Surjekcija, injekcija, bijekcija. Dirihleov princip. - Restrikcija i ekstenzija funkcija. - Kompozicija funkcija.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Sistematski pristup koji polazi od jasnog definisanja osnovnih termina kao što su podskupovi, komplementi i partitivni skupovi, uz primjere koji će učenicima omogućiti intuitivno razumijevanje. Posebnu pažnju treba posvetiti binarnim operacijama i recipročnoj povezanosti relacija, s naglaskom na formalnu provjeru osobina i praktičnu primjenu u različitim kontekstima. Nastava treba uključivati detaljnu analizu relacija ekvivalencije i relacija poretka, uz konstruktivno određivanje faktorskih skupova kao modela podjele prema datim relacijama ekvivalencije. Kroz primjere i zadatke treba razvijati sposobnost ispitivanja i razlikovanja injekcija, surjekcija i bijekcija, kao i razumijevanje njihovog značenja u okviru preslikavanja. Važno je sistematski uvoditi proširenje i ograničenje funkcija, kao i formiranje kompozicije funkcija, pri čemu treba naglasiti povezanost sa prethodno usvojenim pojmovima i primjenu u matematičkoj analizi i algebri. Preporučuje se aktivno uključivanje učenika u rad kroz zadatke koji zahtijevaju formalno dokazivanje osobina, primjenu relacija i funkcija u problemima, te analizu konkretnih primjera preslikavanja u različitim matematičkim strukturama. Korištenje vizualnih i digitalnih alata može dodatno pomoći u razumijevanju apstraktnih pojmova, ali uvijek uz isticanje matematičke tačnosti i preciznosti. Upotreba digitalnih alata, poput GeoGebre ili Desmosa, može dodatno obogatiti nastavu omogućavajući dinamično i interaktivno prikazivanje funkcija i njihovih osobina. Ovi alati ne samo da olakšavaju vizualizaciju, već i podstiču aktivno istraživanje i eksperimentisanje s matematičkim pojmovima. Preporučuje se uključivanje zadataka koji podstiču timski rad i razmjenu mišljenja među učenicima. Grupna analiza funkcija, u kojoj učenici zajednički utvrđuju da li su određene funkcije injekcije, surjekcije ili bijekcije, može doprinijeti razvoju argumentacije, saradnje i dubljeg	

razumijevanja gradiva. Preporučuje se i modeliranje funkcija u realnim situacijama (npr. troškovi u zavisnosti od potrošnje, kompozicija procesa). Preporučuje se ostvarivanje međupredmetne korelacije s informatikom, fizikom i logikom. Ona se postiže kroz primjenu funkcija, relacija i teorije brojeva u algoritmima, kriptografiji, mjerenjima i logičkom zaključivanju.

A.I.2. Primjenjuje osnovne pojmove teorije brojeva u matematičkom zaključivanju i rješavanju problemskih zadataka.	• Objašnjava Peanove aksiome i njihovu ulogu. • Razlikuje deduktivno od induktivnog zaključivanja. • Ispituje da li je broj prost. • Koristi osobine prostih brojeva u matematičkom zaključivanju. • Izvodi faktORIZACIJU prirodnog broja. • Primjenjuje Euklidov teorem. • Rješava linearne Diofantove jednačine. • Određuje cijeli dio i razlomljeni dio realnog broja.
--	--

Poveznice sa ZJNPP

MTP-1.1.2.

Ključni sadržaji

- Skup N .
- Peanovi aksiomi.
- Skup Z . Djeljivost. NZD. Euklidov algoritam.
- Prosti brojevi.
- Eratostenovo sito.
- Euklidov teorem.
- Kanonska faktORIZACIJA prirodnog broja.
- Linearne Diofantove jednačine.
- Cio dio i razlomljeni dio broja a .

Preporuke za ostvarenje ishoda

Postepeno uvoditi pojmove – od brojnih skupova, djeljivosti i prostih brojeva, do Euklidovog algoritma i linearnih Diofantovih jednačina, uz jasno povezivanje s prethodno stečenim znanjima. Koristiti problemske zadatke i realne kontekste – npr. optimizacija podjele resursa, primjena NZD i NZS u praktičnim situacijama, rješavanje Diofantovih jednačina u kontekstu finansija, rasporeda i pakovanja.

Primijeniti vizuelne i istraživačke metode – kao što su: Sito Eratostena za prost broj, tabele za kanonsku faktORIZACIJU, grafički prikazi cijelog i razlomljenog dijela broja, rad u parovima za logičku analizu i argumentaciju rješenja. Uključiti digitalne alate – (GeoGebra, Desmos, aplikacije za faktORIZACIJU i rješavanje jednačina) kako bi se unaprijedilo razumijevanje i povećala angažovanost učenika. Podsticati matematičko zaključivanje i komunikaciju – kroz zadatke otvorenog tipa, mini dokaze i diskusiju o valjanosti rješenja.

Oblast: B/ Algebra

Ishod učenja	Razrada ishoda
B.I.1. Razumije osnovne pojmove algebarskih struktura, prepoznaje njihove osobine i primjenjuje ih u dokazima.	• Razumije pojmove osnovnih algebarskih struktura (grupoid, polugrupa, grupa, prsten, polje). • Razumije pojmove homomorfizma i izomorfizma. • Prepoznaje komutativne polugrupe. • Dokazuje Lagrangeov teorem.

Poveznice sa ZJNPP	MTP-1.1.2., 2.1.2.
Ključni sadržaji	
- Homomorfizam i izomorfizam strukture $(A, *)$. - Grupoid. Polugrupa. Kvazigrupa. Grupa. Abelova grupa. - Lagrangeov teorem. - Prsten. Tijelo. Polje. - Homomorfizam i izomorfizam prstena, tijela i polja.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Započeti s jednostavnim strukturama (npr. grupa, prsten, polje) kroz konkretne primjere (npr. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, modularna aritmetika). Zatim, zadati zadatak u kojem učenici istražuju koji skupovi s kojom operacijom zadovoljavaju aksiome određene strukture. Npr. "Istraži da li skup $\mathbb{Z}$ sa operacijom sabiranja čini grupu." Pripremi kartice sa osobinama (npr. "Imam neutralni element", "Nisam komutativna", "Postojim u modularnoj aritmetici"). Učenici pogađaju koja je struktura opisana (grupa, prsten, polje, monoid...). Dodatno, preporučuje se primjena homomorfizama i izomorfizama kroz konkretne primjere. Učenici mogu analizirati da li određena preslikavanja između poznatih struktura čuvaju operacije sabiranja i množenja. Kroz poređenje osobina različitih struktura, učenici mogu intuitivno prepoznati kada dvije strukture imaju „istu građu“, čime se uvodi pojam izomorfizma. Lagrangeov teorem se uvodi intuitivno kroz istraživačke aktivnosti, u kojima učenici u konačnim određuju sve podgrupe i broje njihove elemente. Uočavanjem pravilnosti da broj elemenata svake podgrupe dijeli broj elemenata grupe, učenici dolaze do osnovne ideje teorema bez formalnog dokazivanja. Radi lakšeg razumijevanja svojstava struktura, preporučuje se vizualizacija operacija korištenjem Cayleyevih tablica za male grupe i prstene. Ove tablice omogućuju učenicima da uoče komutativnost, neutralne elemente i inverze, kao i da provjere zatvorenost operacija. Moguća je korelacija s informatikom kroz primjenu struktura u kodiranju i organizaciji podataka; s logikom kroz aksiomatski pristup; s fizikom kroz simetrične grupe u zakonima prirode.	
B.I.2. Primjenjuje osnovne pojmove matematičke logike u analizi i formulaciji tvrdnji.	• Razumije pojam kvantifikatora. • Primjenjuje kvantifikatore. • Primjenjuje logičke operacije u formiranju složenih iskaza. • Razumije pojam tautologije i dokazuje tautologije primjenom logičkih zakona ili tabela istinitosti.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-1.1.2.
Ključni sadržaji	
- Kvantifikatori. - Iskazi i logičke operacije. - Tautologija.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Učenicima predstaviti primjere tvrdnji iz svakodnevnog života i prevesti ih u matematičke iskaze koristeći simbole logike. Raditi na identifikaciji i formulisanju iskaza, negacija i složenih iskaza kroz radne listove. Primjenjivati kvantifikatore na realne primjere (npr. 'Svi učenici su položili test' i 'Postoji učenik koji nije položio'). Analizirati i dokazivati tautologije koristeći tablice istinitosti. Naglasiti važnost razumijevanja negacija i kontrapozicije, što je ključno za matematičke dokaze. Koristiti digitalne alate za vizualizaciju logičkih operacija (npr. truth table generator). Poticati učenike da samostalno formulišu tvrdnje i istražuju koje su tautologije. Logički koncepti usko su povezani s informatikom kroz konstrukciju i analizu programa, te s filozofijom kroz formalnu logiku i argumentaciju.	

B.I.3. Primjenjuje algebarske i teorijske koncepte u rješavanju matematičkih problema.	• Primjenjuje računske operacije sa polinomima. • Razlaže razlomljene izraze na parcijalne razlomke. • Koristi definiciju kongruencije. • Primjenjuje Ojlerov teorem. • Primjenjuje Wilsonov teorem.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.2.1.
Ključni sadržaji	
- Osnovne osobine polinoma i rješavanje složenijih zadataka razlomljenim izrazima $P(x)/Q(x)$, $Q(x) \neq 0$. - Svodljivost i razlaganje razlomljenih izraza na parcijalne razlomke. - Uslovni identitet za polinome i racionalne izraze. - Kongruencija: relacije kongruencije i klase ostataka po modulu. - Sistem ostataka po datom modulu: potpuni i redukovani sistem ostataka. - Ojlerov teorem i Fermaov stav kao posljedica Ojlerovog teorema. - Kongruencija sa jednom nepoznatom, osnovni stavovi. - Kongruencije prvog stepena. - Wilsonova teorema o određivanju prostog broja preko kongruencija. - Teorem o kineskim ostacima.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Postepeno uvoditi sadržaje kroz povezane koncepte polinoma, razlomljenih izraza i kongruencija, naglašavajući njihovu primjenu u matematičkim problemima. Koristiti praktične primjere i zadatke koji uključuju razlaganje razlomljenih izraza i rješavanje kongruencija prvog stepena. Važno je da se u 1. razredu naglasak stavi na osnovno razumijevanje pojmova kroz intuitivne primjere i jednostavne primjene, dok se formalni dokazi složenijih teorema uvode u obliku konceptualnih objašnjenja ili demonstracija. Nastava treba biti diferencirana, s podrškom za učenike različitih nivoa, uz korištenje digitalnih alata i grupnih aktivnosti koje podstiču kritičko razmišljanje i matematičku komunikaciju. Povezanost s informatikom kroz algoritme za kongruencije i kriptografiju.	
B.I.4. Razumije različite vrste nejednakosti u analizi i primjenjuje ih u rješavanju matematičkih problema.	• Razumije osnovne stavove o nejednakostima. • Razlikuje nejednakosti između brojnih sredina. • Primjenjuje Košijevu nejednakost. • Primjenjuje Bernulijevu nejednakost. • Primjenjuje Koši - Bunjakovskog nejednakost. • Primjenjuje nejednakost Čebiševa.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-1.1.2., 2.3.2.
Ključni sadržaji	
- Osnovni stavovi o nejednakostima. - Brojne sredine (aritmetička, geometrijska, harmonijska i kvadratna). - Nejednakosti sa modulima. - Košijeva nejednakost. - Bernulijevu nejednakost. - Koši - Bunjakovskog nejednakost. - Nejednakost Čebiševa. - Nejednakost među brojnim sredinama.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Započeti nastavu nejednakosti jasnim i preciznim definisanjem osnovnih pojmova i brojnih sredina, uz upotrebu reprezentativnih primjera i vizualnih prikaza radi intuitivnog razumijevanja odnosa među	

veličinama. U obradi klasičnih nejednakosti – Košijeve, Bernulijeve, Koši–Bunjakovskog i Čebiševe – nastavu treba strukturirati tako da učenici kroz vođeno otkrivanje i formalne dokaze razvijaju osjećaj za matematičku logiku i preciznost. Istovremeno je važno ponuditi zadatke u kojima se nejednakosti primjenjuju u širem matematičkom kontekstu, poput procjene izraza, optimizacije i poređenja vrijednosti izraza u funkcionalnim i algebarskim situacijama.

Preporučuje se korištenje problemskih zadataka koji zahtijevaju samostalnu primjenu nejednakosti, kao i organizacija rada u parovima ili manjim grupama radi podsticanja matematičke rasprave i zajedničkog dolaženja do rješenja, čime se razvija argumentacija i komunikacija. Digitalni alati, posebno oni koji omogućavaju grafički prikaz odnosa između izraza i vizualizaciju granica i dometa vrijednosti, treba da budu integrisani u nastavni proces kao sredstvo interaktivnog učenja i dodatne motivacije, ali bez gubitka fokusa na formalno razumijevanje i primjenu matematičkih metoda. Razviti konkretne projekatne zadatke ili istraživačke aktivnosti gdje učenici koriste nejednakosti za rješavanje stvarnih problema ili modeliranje.

Oblast: C/ Geometrija i mjerenja	
Ishod učenja	Razrada ishoda
C.I.1. Analizira geometrijske odnose u ravni i primjenjuje konstrukcije, nejednakosti i preslikavanja.	• Konstruiše trougao i četverougao. • Primjenjuje nejednakosti koje se odnose na trougao i četverougao u konkretnim primjerima. • Rješava problemske zadatke iz planimetrije primjenom Šalove teoreme • Vršiti izometrijska preslikavanja. • Slaže izometrijska preslikavanja. • Određuje grupe izometrija.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.1, 2.3.2.
Ključni sadržaji	
- Složeniji konstruktivni zadaci o trouglu, četverouglu i nejednakostima trougla i četverougla, vektorima u ravni. - Šalova teorema i njena primjena. - Izometrijska preslikavanja. - Punktualne transformacije, recipročne, induktivne, identičke geometrijske transformacije. - Grupe izometrija.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Strukturiran pristup konstruktivnim zadacima koji se odnose na trougao i četverougao, s posebnim naglaskom na preciznost izvođenja, logiku konstrukcije i povezivanje sa teorijskim osnovama poput trougaone nejednakosti i osobina konveksnih četverouglova. Konstrukcijama je potrebno pristupiti problemski, nudeći zadatke koji zahtijevaju kombinaciju više principa, te analizu uslova pod kojima su konstrukcije moguće. U obradi izometrijskih preslikavanja (translacije, rotacije, osne i klizne simetrije), nastavnici trebaju insistirati na formalnoj definiciji, analitičkom prikazu i identifikaciji njihovih ključnih svojstava, uključujući očuvanje dužina i uglova, te povezivanju preslikavanja sa osnovama teorije grupa kroz primjer grupe izometrija u ravni. Šalova teorema treba se uvoditi vektorskim pristupom, s fokusom na formalnu dedukciju i algebarsku interpretaciju odnosa između tačaka i duži u ravni, što omogućava učenicima da kroz precizno argumentovanje savladaju i njenu primjenu u složenijim geometrijskim dokazima. U svim navedenim temama posebno je važno razvijati sposobnost matematičke argumentacije, podsticati dokaze u više koraka, upotrebu više izvora znanja i primjenu vektorskih i koordinatnih metoda. Korištenje digitalnih alata za dinamičku geometriju (poput GeoGebre) preporučuje se kao podrška vizualizaciji i eksperimentisanju, ali uz stalno naglašavanje uloge formalnog zaključivanja i stroge matematičke logike u konačnoj validaciji rezultata.	

2. razred /2 časa sedmično/70 časova godišnje/

Oblast: A/ Skupovi, brojevi i operacije	
Ishod učenja	Razrada ishoda
A.II.1. Analizira osnovne pojmove teorije brojeva, te ih primjenjuje u različitim matematičkim kontekstima.	• Analizira osnovne pojmove teorije brojeva. • Primjenjuje teoriju brojeva. • Analizira osobine racionalnih i iracionalnih brojeva koristeći teoreme. • Određuje razlomljeni dio broja primjenom Jakobijevog teorema.
Poveznice sa ZJNPP	MTP - 1.2.1. , 1.2.2.
Ključni sadržaji	
- Diofantove aproksimacije. - Skup Q i skup I. - Teoreme za utvrđivanje racionalnih i iracionalnih brojeva. - Razlomljeni dio - teorem Jakobija.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Kombinovati teorijski i problemski pristup. Teoreme za prepoznavanje racionalnih i iracionalnih brojeva treba uvoditi kroz konkretne primjere i kontraprimjere, uz analizu brojeva sa specifičnim osobinama (npr. decimalni zapisi, korijeni, razlomci). Razlomljeni dio broja i Jakobijev teorem treba povezati sa zadacima koji uključuju bročane procjene i konstrukcije aproksimacija. Uvođenje Diofantovih aproksimacija može se realizovati kroz jednostavne zadatke koji ilustriraju granice racionalnog približavanja realnim brojevima. Preporučuje se da se uz ovaj sadržaj ponude i diferencirani zadaci različite složenosti, kako bi se osiguralo da svi učenici, bez obzira na predznanje, mogu postići određeni nivo razumijevanja i primjene	

Oblast: B/ Algebra	
Ishod učenja	Razrada ishoda
B.II.1. Rješava algebarske jednačine višeg stepena.	• Rješava algebarske jednačine višeg stepena. • Primjenjuje Vietove formule u rješavanju jednačina n-tog stepena. • Razlaže racionalne funkcije na parcijalne razlomke.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.2.2
Ključni sadržaji	
- Jednačine n-tog stepena. - Vietove formule za jednačine n-tog stepena. - Simetrični polinomi. - Racionalna rješenja algebarskih jednačina n-tog stepena. - Racionalne funkcije. - Razlaganje racionalnih funkcija na parcijalne razlomke.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Preporučuje se da učenici sistematski vježbaju rješavanje algebarskih jednačina višeg stepena koristeći metode faktorizacije, zamjene, grupisanja i Hornerovog algoritma, posebno fokusirajući se na primjenu Vietovih formula kao efikasnog alata za povezivanje korijena i koeficijenata jednačina. Rad na razlaganju racionalnih funkcija na parcijalne razlomke treba integrisati kroz zadatke koji razvijaju sposobnost dekompozicije složenih izraza i pripremaju učenike za kasniju primjenu u integraciji i analizi funkcija. Nadovezati se na znanje usvojeno kroz prethodni razred i produbiti isto. Važno je uključiti zadatke različitog nivoa složenosti, uključujući i primjenu stečenih vještina u	

problemima sa realnim i kompleksnim korijenima. U nastavu je poželjno uključiti primjere iz fizike i informatike, te koristiti digitalne alate za vizualizaciju i istraživanje.	
B.II.2. Primjenjuje aritmetički niz i geometrijski niz.	• Identifikuje aritmetički i geometrijski niz na osnovu pravila formiranja. • Zapisuje opći član aritmetičkog i geometrijskog niza i koristi ga za izračun članova. • Računa zbir prvih n članova oba tipa niza. • Upoređuje aritmetičku i geometrijsku sredinu i povezuje ih s pravilima formiranja nizova. • Analizira odnose među članovima niza (razlike, količnici, uslovi jednakosti). • Modelira jednostavne problemske situacije pomoću aritmetičkog i geometrijskog niza.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-1.1.2. , 2.1.1.
Ključni sadržaji	
- Aritmetički niz. - Geometrijski niz. - Zbir prvih n članova aritmetičkog niza. - Zbir prvih n članova geometrijskog niza. - Primjene nizova.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Započeti prepoznavanjem brojevnih nizova u poznatim kontekstima (npr. rast cijena, štednja, raspored sjedišta), zatim uvodi aritmetički i geometrijski niz kroz konkretne primjere. Učenike postepeno vodi ka formulisanju opšteg člana niza, te samostalnom izvođenju formula za zbir prvih n članova. Preporučuje se da nastavnik koristi tabelarni prikaz za uočavanje obrazaca i vizualne modele (npr. brojna prava, dijagrami) kako bi se olakšalo razumijevanje promjena među članovima. Poseban fokus treba staviti na poređenje aritmetičke i geometrijske sredine i njihovu povezanost sa nizovima. Zadavati problemske zadatke u kojima učenici primjenjuju formule za opšti član i zbir, uz zadatke koji uključuju uočavanje odnosa među članovima (npr. koliko puta je treći član veći od prvog, pod kojim uslovom je neki član jednak zbiru drugih). Zadavati zadatke iz modeliranja realne situacije pomoću nizova (npr. plan otplate kredita, raspored u razredu, rast broja pregleda u digitalnim kampanjama, itd.).	

Oblast: C/ Geometrija i mjerenja	
Ishod učenja	Razrada ishoda
C.II.1. Primjenjuje osnovne elemente kombinatorike u geometriji.	• Identificira i izračuna broj duži, dijagonala i trouglova u konačnim skupovima tačaka u ravni. • Objasni i primijeni osnovne kombinatorne formule u rješavanju geometrijskih problema. • Primijeni kombinatoriku za analizu i dokazivanje svojstava geometrijskih konfiguracija u zadacima različitog stepena složenosti
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.1, 2.3.2.
Ključni sadržaji	

- Uvod u kombinatornu geometriju. - Konačni skupovi tačaka u ravni.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Preporučuje se da učenici kroz praktične zadatke istražuju i broje geometrijske objekte poput duži, trokuta i dijagonala u skupovima tačaka. Dobro je koristiti crteže i modele kako bi jasnije razumjeli odnose između tačaka i geometrijskih figura. Potaknuti ih da povezuju kombinatorne formule s konkretnim geometrijskim situacijama i rješavaju zadatke u kojima primjenjuju kombinatoriku za analizu i dokazivanje svojstava geometrijskih konfiguracija. Preporučuje se korištenje dinamičkih geometrijskih softvera	
C.II.2. Primjenjuje homotetiju i sličnost geometrijskih figura.	• Računa i primjenjuje proporcije u zadacima sličnosti i homotetije. • Konstruiše Ojlerovu kružnicu i Ojlerovu pravu te ih koristi za rješavanje geometrijskih problema. • Razumije i primjenjuje Manelajev i Čevin teorem u dokazima i zadacima. • Određuje i konstruiše zajedničke tangente kružnica. • Koristi homotetiju i sličnost za rješavanje složenijih geometrijskih zadataka i konstrukcija.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.4
Ključni sadržaji	
- Rekapitulacija osnovnih pojmova o proporcijama, homotetiji i sličnosti. - Ojlerova prava. Ojlerova kružnica. - Manelajev teorem. Čevin teorem. - Pol i polarna kružnica. - Zajedničke tangente kružnice. - Konstruktivni zadaci primjene sličnosti i homotetije.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Učenici trebaju sistemski primjenjivati računanje proporcija kroz zadatke koji uključuju sličnost i homotetiju, kao temelj za složenije geometrijske konstrukcije. Konstrukcija Ojlerove kružnice i Ojlerove prave treba biti integrisana u rješavanje problemskih zadataka radi produbljivanja razumijevanja geometrijskih odnosa i simetrija. Detaljno proučavanje i primjena Manelajevog i Čevinog teorema potiču razvoj apstraktnog mišljenja i dokaznih vještina. Rad na određivanju zajedničkih tangenti te korištenje homotetije u složenim problemima omogućuje učenicima da povežu različite geometrijske koncepte i razviju preciznost u konstrukcijama. Vizualizacija i analitički pristup treba biti sastavni dio nastavnog procesa. Nastava treba obuhvatiti rad u paru i grupi, diferencirane zadatke (osnovni–srednji–napredni nivo), kao i redovno korištenje digitalnih alata poput GeoGebre radi dinamičke vizualizacije transformacija, tangenti i složenih geometrijskih odnosa. Također, preporučuje se razvoj malih projekata (npr. izrada modela geometrijskih konfiguracija) kroz koje učenici mogu integrisati teorijska znanja s praktičnom primjenom.	
C.II.3. Primjenjuje metodu invarijanti.	• Upoznaje i primjenjuje metodu invarijanti u problemskim situacijama koje uključuju slaganje polimino i analizu nemogućnosti.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.1
Ključni sadržaji	
- Tablice polimino. - Metoda invarijanti.	

Preporuke za ostvarenje ishoda
Predstavi pojmove polimina i njihove vrste (domino, tromino, tetromino, pentomino) i objasni osnovna pravila slaganja polimina bez preklapanja i praznih mjesta. Demonstrirati jednostavan primjer slaganja domino pločica na tablicu i uvesti koncept invarijanti kroz klasični problem s uklonjenim čoškovima na šahovskoj tabli. Podijeli učenike u grupe i dati im zadatak da pokriju određenu tablicu domino pločicama (npr. 2×8 ili 4×6). Poticati učenike da sami otkriju i primijene invarijantu, kao što je bojanje ćelija, kako bi shvatili moguća i nemoguća slaganja. Organizovati kratku diskusiju o rezultatima i uočenim pravilima. Uvesti složenije polimine poput L-tromina i pentomina i postavi izazov da učenici pokušaju prekriti tablice ovim oblicima (npr. pokriti 6×6 tablicu L-trominima). Podstaknuti ih da koriste matematičke argumente i invarijante za analizu zadatka. Poželjno je omogućiti povezivanje s informatikom kroz aktivnosti poput osmišljavanja jednostavnog algoritma za provjeru mogućnosti slaganja.

Oblast: D/ Podaci i vjerovatnoća	
Ishod učenja	Razrada ishoda
D.II.1. Primjenjuje osnovne elemente kombinatorike.	- Definiše i razlikuje permutacije, varijacije i kombinacije sa i bez ponavljanja. - Samostalno rješava zadatke koji uključuju računanje broja permutacija, varijacija i kombinacija. - Formuliše i dokazuje osnovne kombinatorne identitete koristeći kombinatorne argumente i interpretacije. - Analizira kombinatorne probleme primjenom algoritamskog pristupa (kroz upute, dijagrame toka ili pseudokôd).
Poveznice sa ZJNPP	MTP 1.1.2 , 2.3.2.
Ključni sadržaji	
- Elementi kombinatorike. - Permutacije. - Varijacije bez i sa ponavljanjem. - Particije i kompozicije. - Kombinatorne metode u dokazivanju identiteta	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Preporučuje se rad koji će nadilaziti osnovno operativno računanje permutacija, varijacija i kombinacija, te razvijati sposobnost apstraktnog mišljenja i strukturiranog kombinatornog zaključivanja. Konkretno, preporučuje se uvođenje kombinatornih problema u kontekstu zadataka sa više rješenja i strategija, kako bi se podstakla diskusija o različitim pristupima (npr. klasično brojanje vs. princip uključivanja i isključivanja), zatim rad na problemskim zadacima koji vode do formulacije identiteta i traženje kombinatornih dokaza za njih. Naglasiti razliku između particija i kompozicija, koristeći konkretne brojne primjere, ali i prelazeći ka općim formulacijama. U cilju osnaživanja kompetencija i interesa učenika, preporučuje se integracija zadataka iz takmičarske prakse, kao i problemskih zadataka koji povezuju kombinatoriku s drugim oblastima (npr. vjerovatnoćom, teorijom grafova ili osnovama kriptografije).	

3. razred /3 časa sedmično/105 časova godišnje/

Oblast: B/ Algebra	
Ishod učenja	Razrada ishoda
B.III.1. Rješava Diofantove jednačine višeg reda.	• Rješava Diofantove jednačine višeg reda. • Primjenjuje Diofantove jednačine u problemskim zadacima. • Analizira Peleovu jednačinu. • Primjenjuje Fermaovu teoremu.
Poveznice sa ZJNPP	MTP- 2.2.2
Ključni sadržaji	
- Diofantove jednačine višeg reda. - Peleova jednačina. - Fermaova teorema.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Započeti s pregledom osnovnih pojmova Diofantovih jednačina, naglašavajući razliku između linearnih i nelinearnih, višeg reda . Kroz primjere i vođene zadatke treba omogućiti učenicima razumijevanje metoda rješavanja takvih jednačina, uključujući i primjenu modularne aritmetike i faktORIZACIJE. Posebnu pažnju treba posvetiti analizi Peleove jednačine, objašnjavajući njene karakteristike i poznate metode rješavanja, te njen značaj u matematici. Fermatova teorema se može predstaviti kroz njenu historijsku važnost i osnovne tvrdnje, a zatim kroz jednostavnije specijalne slučajeve koji su pristupačni učenicima. Preporučuje se korištenje interaktivnih metoda rada, kao što su rad u grupama, istraživački zadaci i diskusije, kako bi učenici razvili dublje razumijevanje i sposobnost primjene teorema i jednačina. Redovna povratna informacija i evaluacija pomažu u praćenju napretka i razumijevanja gradiva.	
B.III.2. Rješava sisteme jednačina i nejednačina.	• Rješava linearne i kvadratne jednačine i nejednačine sa dvije nepoznate. • Rješava sisteme jednačina i nejednačina od kojih je bar jedna iracionalna. • Rješava sisteme jednačina i nejednačina od kojih je bar jedna eksponencijalna ili logaritamska.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.2.2., 2.2.3
Ključni sadržaji	
- Sistemi jednačina drugog i višeg reda. - Linearne i kvadratne jednačine i nejednačine sa dvije nepoznate. - Sistemi nejednačina drugog i višeg stepena. - Sistemi jednačina i nejednačina, od kojih je bar jedna eksponencijalna. - Sistemi jednačina i nejednačina, od kojih je bar jedna logaritamska.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Sistematično i detaljno predstaviti metode rješavanja linearnih i kvadratnih jednačina i nejednačina sa dvije nepoznate, uključujući grafičku interpretaciju rješenja kako bi učenici razumjeli geometrijski značaj ovih problema. Razumijevanje ovih metoda ključno je za razvoj apstraktnog i analitičkog mišljenja, koje je osnova za naprednije matematičke teme i stvarne primjene u nauci, tehnologiji i inženjerstvu. Kod sistema sa iracionalnim jednačinama, važno je naglasiti racionalizaciju i obaveznu provjeru svih rješenja zbog mogućih 'lažnih korijena', jer to uči učenike preciznosti i rigoroznom pristupu problemima. Prilikom rada sa eksponencijalnim i logaritamskim jednačinama, učenici usvajaju važne pojmove iz oblasti funkcija, što im omogućava da rješavaju složene matematičke i realne probleme, kao što su modeliranje rasta, raspadanja ili promjena u ekonomiji. Ovi zadaci omogućavaju učenicima da primjene teorijsko znanje u složenijim i realističnijim kontekstima,	

razvijaju kritičko razmišljanje i pripremaju se za dalje matematičke izazove i praktične situacije u nauci i tehnologiji. Nastavnik treba poticati samostalno istraživanje, grupni rad i prezentaciju različitih pristupa rješavanju zadataka. Korištenje grafičkih alata (npr. GeoGebra) pomaže u vizualizaciji rješenja i boljem razumijevanju problema. Učenici promjenom vrijednosti parametra analiziraju promjenu rješenja sistema.

B.III.3. Prikazuje matematičke strukture upotrebom različitih zapisa.

- Opisuje matricu te navodi primjere matrica (trougona, skalarna, dijagonalna, jedinična, transponovana).
- Izvodi osnovne operacije s matricama (sabiranje, oduzimanje, množenje skalarom, množenje matrica) i primjenjuje ih u rješavanju zadataka.
- Razlikuje matrice i determinante.
- Računa determinantu.
- Određuje inverznu matricu (ako postoji) primjenom odgovarajuće metode i koristi je za rješavanje sistema linearnih jednačina.
- Određuje rang matrice.
- Primjenjuje Kronecker - Capelijeve stav za rješavanje sistema jednačina.

Poveznice sa ZJNPP

MTP-2.1.2

Ključni sadržaji

- Pojam matrice kao sheme.
- Jednakost dvije matrice, sabiranje, oduzimanje, množenje dvije matrice.
- Množenje matrice skalarom.
- Pojam nula-matrice i jedinične matrice.
- Pojam determinante n-tog reda i njene osobine.
- Izračunavanje vrijednosti determinanti (Laplasov razvoj).
- Primjena determinanti na rješavanje kvadratnog sistema od n jednačina (Cramerovo pravilo).
- Pojmovi adjungovane i inverzne matrice.
- Razne metode izračunavanja (određivanja) inverzne matrice.
- Pojam ranga matrice.
- Kronecker - Capelijeve stav.

Preporuke za ostvarenje ishoda

Matrica je učenicima nov pojam koji je potrebno uvesti uz odgovarajuće primjere. Objasniti pojmove nula-matrice, jedinične, adjungovane, inverzne matrice, gornja i donja trougona matrica. Objasniti razliku između matrica i determinanti. Učenicima demonstrirati primjenu matrica i determinanti na rješavanje sistema linearnih jednačina i to do trećeg stepena. Značaj matrice u savremenim naukama, naročito u izučavanju važnih društvenih i tehničkih problema ne zahtijeva posebnu argumentaciju. Objasniti osobine determinante kroz primjere. Predstaviti Kramerovo pravilo kao metodu rješavanja sistema linearnih jednačina pomoću determinanti, s naglaskom na primjenu kod sistema reda 2 i 3, čime se omogućava povezivanje algebarskih operacija nad matricama s praktičnim problemima. Determinantu matrice staviti u funkciju izračunavanja inverzne matrice (za regularnu matricu). Nastavnik treba također uvesti pojam ranga matrice, objasniti njegov značaj i metode određivanja, kao i detaljno predstaviti Kronecker-Capelijeve stav, koji povezuje rang matrice i proširene matrice sa rješavanjem sistema linearnih jednačina. Praktičnim zadacima učenike treba osposobiti da određuju rang matrice i primjenjuju Kronecker-Capelijeve stav kako bi zaključili o postojanju i broju rješenja sistema kroz zadatke s realnim koeficijentima ili parametrima. Korištenje digitalnih alata za demonstraciju rada s matricama i sistemima.

B.III.4. Primjenjuje vektore i analizira osnovne pojmove linearnih operatora i matrica linearnih transformacija.	• Primjenjuje vektore na rješavanje konkretnih problema. • Prepoznaje i primjenjuje osnovne karakteristike linearnih operatora. • Povezuje pojam linearne transformacije sa matricama.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.3.
Ključni sadržaji	
- Vektorski prostor. - Osobine i primjeri vektorskog prostora. - Algebarske linearne transformacije vektorskog prostora. - Primjeri linearnih transformacija u vektorskom prostoru običnih vektora.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Predstaviti primjenu vektora kroz rješavanje različitih konkretnih problema iz geometrije, fizike i drugih oblasti, pokazujući kako se vektori koriste za opisivanje položaja, pravca, sile i kretanja. Važno je koristiti primjere koji potiču razvoj analitičkog i vizualnog mišljenja. Zatim treba uvesti pojam linearnog operatora kao funkcije koja preslikava vektore u druge vektore uz očuvanje linearnih osobina, koristeći jednostavne primjere i vizualizacije. Objasniti vezu između linearnog operatora i matrice linearne transformacije, pokazujući kako matrica predstavlja operator u određenoj bazi. Preporučuje se rad sa konkretnim zadacima i praktičnim primjerima, sastavljanje i primjenu matrica transformacija. Također, korištenje softverskih alata (npr. GeoGebra, MATLAB) može pomoći učenicima da bolje razumiju apstraktne pojmove kroz vizualne prikaze.	

Oblast: C/ Geometrija i mjerenja	
Ishod učenja	Razrada ishoda
C.III.1. Primjenjuje osnovne elemente kombinatorike u geometriji.	• Primjenjuje kombinatoriku za rješavanje zadataka vezanih za geometrijske konfiguracije. • Analizira Helijev teorem. • Primjenjuje Helijev teorem. • Primjenjuje Dirihleov princip.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.2.
Ključni sadržaji	
- Konveksni skupovi tačaka u ravni. - Helijev teorem. - Dirihleov princip.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Predstaviti osnovne principe kombinatorike i njihovu povezanost sa geometrijskim konfiguracijama kroz primjere iz prakse. Poseban fokus treba staviti na Helijev teorem, prvo kroz analizu i razumevanje njegovih tvrdnji i primjera, a zatim kroz zadatke u kojima učenici samostalno primjenjuju teorem za rješavanje problema. Takođe, važno je objasniti Dirihleov princip kroz jednostavne, ali ilustrativne primjere kako bi učenici razumjeli njegovu primjenu u kombinatorici i geometriji. Nastavnik treba koristiti interaktivne metode rada, uključujući vizualizacije, rad u grupama i problemske zadatke koji podstiču kritičko razmišljanje i praktičnu primjenu naučenog. Kroz redovne povratne informacije i vođene diskusije, nastavnik pomaže učenicima da prodube razumijevanje i primjenu kombinatoričkih principa u geometrijskim kontekstima.	
C.III.2. Primjenjuje trigonometriju u dokazivanju geometrijskih nejednakosti.	• Analizira planimetrijske nejednakosti. • Analizira stereometrijske nejednakosti.

	• Primjenjuje trigonometriju u dokazivanju planimetrijskih i stereometrijskih nejednakosti.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.2.2.
Ključni sadržaji	
- Planimetrijske nejednakosti. - Stereometrijske nejednakosti.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Objasnite osnovne pojmove i formule trigonometrije koje će učenici koristiti za dokazivanje nejednakosti. Prikazate konkretne primjere planimetrijskih nejednakosti, kao što je nejednakost trougla, koristeći geometrijske crteže i trigonometrijske formule. Uključite zadatke gdje učenici samostalno računaju i dokazuju ove nejednakosti. Zatim uvesti stereometrijske nejednakosti kroz primjere u trodimenzionalnim tijelima (kocka, kvadar, piramida). Koristiti makete ili digitalne modele kako bi učenici vizualizirali odnose između stranica, dijagonala i površina. Zadavati zadatke u kojima će primjenjivati trigonometriju za dokazivanje ovih nejednakosti.	
C.III.3. Koristi geometrijske principe za analizu i rješavanje prostornih zadataka.	• Analizira figure i tijela u prostoru. • Primjenjuje relacije paralelnosti ravni. • Primjenjuje Talesovu teoremu i obrat u prostoru. • Primjenjuje projekcije na osu i ravan. • Primjenjuje ortogonalne projekcije. • Računa površine projekcija poligona.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.3.
Ključni sadržaji	
- Relacija paralelnosti ravni. - Talesova teorema i obrat. - Prostorni četverougao. - Projekcija na osu i ravan. - Ortogonalne projekcije. - Površine projekcija poligona. - Rogalj.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Pružiti jasne primjere i vizualne prikaze prostornih figura i njihovih odnosa, posebno ističući paralelnost ravni i primjenu Talesove teoreme u prostoru. Preporučuje se da kroz praktične zadatke učenici vježbaju različite vrste projekcija na pravu i ravan, uključujući ortogonalne projekcije, te da izračunavaju površine projekcija poligona. Korištenje modela, digitalnih alata i grupni rad pomoći će učenicima da razviju prostornu vizualizaciju i razumijevanje koncepta.	
C.III.4. Primjenjuje potenciju tačke u odnosu na kružnicu.	• Računa razliku rastojanja kvadrata proizvoljne tačke od dviju datih tačaka (u ravni ili prostoru). • Analizira pojam potencije tačke u odnosu na kružnicu. • Primjenjuje potenciju tačke u odnosu na kružnicu.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.2.2.
Ključni sadržaji	
- Stranica trougla u funkciji ostalih dviju stranica i naspramnog ugla. - Razlika rastojanja kvadrata proizvoljne tačke od dviju datih tačaka (u ravni ili prostoru). - Potencija tačke u odnosu na kružnicu.	

Preporuke za ostvarenje ishoda
Učenike upoznati s pojmom kvadrata rastojanja između tačaka u ravni i prostoru, koristeći zadatke u kojima se izražava razlika kvadrata rastojanja proizvoljne tačke od dvije date tačke – kao uvod u pojam potencije tačke. Zatim treba definisati potenciju tačke u odnosu na kružnicu i demonstrirati njenu primjenu na različitim konfiguracijama (npr. sečice, tangente, vanjske i unutrašnje tačke). Preporučuje se uvođenje zadataka koji povezuju algebarski izraz potencije sa geometrijskim značenjem, uključujući i prostore gdje se koristi trodimenzionalna interpretacija (npr. presjeke sfere i prave). Korištenje dinamične geometrije (GeoGebra) može pomoći u vizualizaciji potencije tačke i promjeni odnosa u zavisnosti od njenog položaja.

4. razred /3 časa sedmično/90 časova godišnje/

Oblast: B/ Algebra	
Ishod učenja	Razrada ishoda
B.IV.1. Primjenjuje Booleovu algebru.	• Usvaja pojam Booleove funkcije. • Koristi bazu iskazne algebre. • Usvaja pojam problema. minimizacije Booleove funkcije. • Primjenjuje Booleovu algebru u konkretnim primjerima.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.3.
Ključni sadržaji	
- Booleova funkcija. - Baza iskazne algebre. - Booleova algebra i A - mreža.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
S obzirom na to da su učenici prethodno savladali logičke operacije, upotrebu kvantifikatora i razlikovanje tautologija, preporučuje se da se rad na Booleovoj algebri gradi kao nastavak tog znanja, kroz algebarsku strukturu logike. Nastavnik treba istaći kako su logičke operacije ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) već poznate učenicima, ali se sada razmatraju kao elementi Booleove funkcije, s vrijednostima 0 i 1, što omogućava njihovu algebarsku obradu, analizu i minimizaciju. Preporučuje se uvesti pojam Booleove funkcije kroz konkretne izraze koji su učenicima već poznati kao iskazi, ali sada u funkcionalnom obliku. Učenici treba da povežu formiranje logičkih iskaza s konstrukcijom Booleove funkcije, a zatim primjenjuju znanje o logičkim zakonima u procesu minimizacije — s naglaskom na identifikaciju ekvivalentnosti, identiteta i tautoloških oblika unutar izraza. Kao prirodan nastavak, učenike voditi ka praktičnoj primjeni Booleove algebre kroz digitalne logičke sklopove, grafove i problemske zadatke, gdje logika prelazi iz apstraktne domene u primjenjiv alat za rješavanje zadataka iz informatike, elektronike ili automatike.	
B.IV.2. Ispituje konvergenciju nizova i redova koristeći relevantne teoreme i kriterije.	• Analizira pojam tačke gomilanja. • Ispituje konvergenciju i divergenciju nizova. • Analizira Bolzano - Weierstrassovu teoremu.

	• Primjenjuje Bolzano - Weierstrassovu teoremu. • Primjenjuje Cauchyev kriterij konvergencije. • Primjenjuje Stolzovu teoremu.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.1.
Ključni sadržaji	
- Tačka gomilanja niza. - Bolzano - Weierstrassova teorema. - Konvergentni i divergentni nizovi. - Racionalne oprecije sa konvergentnim nizovima. - Cauchyev kriterij konvergencije. - Stolzova teorema.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Jasno objasniti pojmove konvergencije i divergencije nizova, uz posebnu pažnju na pojam tačke gomilanja kao uvod u Bolzano-Weierstrassovu teoremu. Kroz primjere i dokaze treba pokazati primjenu teoreme za izdvajanje konvergentnih podnizova. Uvesti Cauchyev kriterij kao praktičan alat za provjeru konvergencije nizova, te Stolzovu teoremu za računanje granica nizova koji imaju oblik razlomaka. Preporučuje se rad na zadacima koji uključuju različite vrste nizova i redova, uz postupnu nadogradnju kompleksnosti. Korištenje grafičkih prikaza i digitalnih alata (npr. GeoGebra, Desmos) može pomoći učenicima da intuitivno razumiju ponašanje nizova i redova, posebno pri vizualizaciji granice i tačke gomilanja. Zadatke je poželjno organizovati u različite nivoe složenosti (osnovni, srednji i napredni) radi diferencirane nastave. Preporučuje se uključivanje problemski orijentisanih zadataka koji podstiču učenike da samostalno biraju kriterij ili uoče greške u primjeni teorema. Takođe, važno je posvetiti vrijeme formalnim dokazima i diskusiji o čestim pogrešnim interpretacijama, čime se jača logičko razmišljanje i konceptualno razumijevanje.	
B.IV.3. Primjenjuje različite načine zadavanja funkcija i analizira osnovne pojmove neprekidnosti i granica funkcija.	• Primjenjuje različite načine zadavanja funkcije (analitički, grafički, tabelarni, opisni). • Analizira pojmove supremuma i infimuma u kontekstu funkcija. • Razumije i primjenjuje pojmove hiperbolnih i area funkcija. • Objasňuje beskonačno male i beskonačno velike veličine i njihovu ulogu u analizi funkcija. • Analizira i primjenjuje pojam ravnomjerne neprekidnosti funkcije. • Razumije i dokazuje teoremu o neprekidnim funkcijama na zatvorenom segmentu.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.2
Ključni sadržaji	
- Načini zadavanja funkcije. - Supremum i infimum. - Hiperbolne i area funkcije. - Beskonačno male i beskonačno velike veličine. - Ravnomjerna neprekidnost. - Teorema o neprekidnim funkcijama na segmentu.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	

Predstaviti različite načine zadavanja funkcija – analitički, grafički, tabelarni i opisni – kroz primjere i praktične zadatke. Objasniti pojmove supremuma i infimuma kao osnovnih karakteristika funkcija, te uvesti koncept beskonačno malih i beskonačno velikih veličina s naglaskom na njihovu primjenu u analizi. Posebnu pažnju posvetiti pojamima neprekidnosti i ravnomjerne neprekidnosti, koristeći jednostavne primjere i teoremu o neprekidnim funkcijama na zatvorenom segmentu. Preporučuje se rad s vizualnim prikazima funkcija i zadacima koji potiču intuitivno razumijevanje granica i neprekidnosti.	
B.IV.4. Rješava diferencijalne jednačine i sisteme diferencijalnih jednačina.	• Analizira pojam diferencijalne jednačine (prvog i n - tog reda). • Povezuje pojam diferencijalne jednačine prvog reda sa geometrijskim značenjem. • Rješava različite tipove diferencijalnih jednačina. • Analizira postojanje i prirodu rješenja diferencijalne jednačine. • Rješava sisteme diferencijalnih jednačina.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.2
Ključni sadržaji	
- Pojam diferencijalne jednačine (prvog i n - tog reda). - Geometrijsko tumačenje diferencijalne jednačine prvog reda. - Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim. - Homogene diferencijalne jednačine. - Linearna diferencijalna jednačina prvog reda. - Bernoullijeva jednačina. - Riccatijeva jednačina. - Totalna ili egzaktna diferencijalna jednačina. - Lagrangeova diferencijalna jednačina. - Egzistencija i jedinstvenost rješenja diferencijalne jednačine. - Sistemi diferencijalnih jednačina. - Svođenje sistema na jednu jednačinu.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Predstaviti osnovni pojam diferencijalne jednačine, uključujući diferencijalne jednačine prvog i višeg reda. Posebnu pažnju treba posvetiti geometrijskom tumačenju diferencijalnih jednačina prvog reda, kroz primjere pravaca tangente i polja pravaca. Potrebno je sistematično uvoditi metode rješavanja različitih tipova diferencijalnih jednačina, počevši od jednostavnih separabilnih, linearnih do složenijih sistema diferencijalnih jednačina. Naglasiti važnost proučavanja postojanja i jedinstvenosti rješenja koristeći osnovne teoreme o diferencijalnim jednačinama. Preporučuje se rad na praktičnim zadacima i primjeni diferencijalnih jednačina u modeliranju realnih problema iz fizike, biologije ili ekonomije, kako bi učenici razumjeli njihovu primjenu i značaj.	
B.IV.5. Primjenjuje polinome za interpolaciju funkcija i rješava polinomne jednačine.	• Obrazuje polinom Čebiševa. • Vršiti interpolaciju funkcija. • Analizira Lagrangeov interpolacioni polinom. • Rješava polinomne jednačine.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.1
Ključni sadržaji	
- Obrazovanje polinoma Čebiševa. - Interpolacija funkcija: opći pojmovi.	

- Lagrangeov interpolacioni polinom. - Polinomne jednačine.
Preporuke za ostvarenje ishoda
Objasniti pojam interpolacionih polinoma, s posebnim osvrtom na Lagrangeov interpolacioni polinom i polinome Čebiševa kao efikasne metode za aproksimaciju funkcija. Kroz konkretne primjere pokazati kako se interpolacija koristi za približno određivanje vrijednosti funkcije na osnovu poznatih tačaka. Obratiti pažnju na praktičnu primjenu rješavanja polinomnih jednačina, te prikazati različite metode za njihovo rješavanje. Preporučuje se da učenici rade zadatke koji uključuju konstrukciju interpolacionih polinoma i njihovu primjenu u realnim problemima.

Oblast: C/ Geometrija i mjerenja	
Ishod učenja	Razrada ishoda
C.IV.1. Primjenjuje afine transformacije i različite koordinatne sisteme u ravni i prostoru.	• Opisuje afine transformacije kao posebne vrste transformacija ravni. • Primjenjuje afine transformacije prave i kružnice. • Primjenjuje afine transformacije u odnosu na dvije prave. • Povezuje afine transformacije s promjenama koordinatnog sistema. • Opisuje osobine Dekartovih, polarnih, cilindričnih i sfernih koordinata. • Transformiše jedan koordinatni sistem u drugi u kontekstu afinih koordinata.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.2
Ključni sadržaji	
- Pojam afinosti, recipročne afinosti u analitičkoj geometriji. - Afinost prave. - Afina transformacija kružnice. - Afinost u odnosu na dvije prave. - Afine koordinate u ravni i prostoru. - Polarne koordinate u ravni. - Cilindrične i sferne koordinate. - Transformacija jednog koordinatnog sistema u drugi.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Započeti uvodom u afine transformacije kao posebnu klasu geometrijskih transformacija koje čuvaju paralelnost, ali ne nužno dužinu i ugao. Pojasniti osnovne tipove (translacija, homotetija, sličnost, rotacija i afina refleksija) i naglasiti njihovu algebarsku reprezentaciju pomoću matrica i vektora. Kroz rad na konkretnim primjerima transformacija pravih i kružnica (npr. kako se mijenjaju pod afinim preslikavanjem), učenici će analizirati očuvanje geometrijskih osobina. Zatim se uvodi primjena afinih transformacija u odnosu na dvije prave, posebno u slučaju kada su prave paralelne ili se sijeku — s ciljem razvijanja osjećaja za promjene oblika i odnosa pod transformacijom. Povezivanjem afinih transformacija s promjenama koordinatnog sistema učenici razvijaju razumijevanje geometrijske i algebarske strane problema. Kroz rad sa različitim koordinatnim sistemima (Dekartov, polarni, cilindrični i sferni), učenici transformišu izraze iz jednog oblika u drugi, posebno u kontekstu afinih koordinata i promjene baze. Preporučuje se upotreba alata kao što su GeoGebra 3D ili softver za simboličko računanje (npr. Wolfram Alpha, Desmos, MATLAB) za vizualizaciju efekta transformacija i prelazaka između sistema. Grupni rad i istraživački zadaci (npr. identifikovanje koja transformacija je primijenjena na zadatu figuru) dodatno podstiču dublje razumijevanje.	

--

Oblast: D/ Podaci i vjerovatnoća	
Ishod učenja	Razrada ishoda
D.IV.1. Primjenjuje funkciju generatriše i osnovne kombinatorne metode za rješavanje zadataka.	• Razumije pojam funkcije generatriše i prepoznaje njenu strukturu. • Primjenjuje funkciju generatriše za rješavanje osnovnih problema brojanja (kombinacije, permutacije, raspodjele). • Modelira jednostavne probleme brojanja pomoću generatriša. • Prepoznaje osnovne kombinatorne strukture (npr. latinski kvadrati, blok šeme) i opisuju njihove osobine. • Povezuje funkciju generatriše sa principima kombinatorike kroz konkretne primjere.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-3.1.1
Ključni sadržaji	
- Funkcija generatriše. - Teorija blok šema. - Teorija konačnih geometrija. - Teorija kodova. - Latinski kvadrati. - Problemi razbijanja. - Teoreme o egzistenciji kombinatornih konfiguracija.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Objasniti pojam funkcije generatriše kao moćan alat za proučavanje i brojanje kombinatornih objekata, povezujući ga s prethodno usvojenim pojmovima permutacija, kombinacija i varijacija. Preporučuje se rad kroz primjere u kojima učenici izrađuju i koriste funkcije generatriše za rješavanje problema brojanja. Pored toga, kroz diskusiju i praktične zadatke treba uvesti osnovne pojmove iz teorije blok šema, latinskih kvadrata i teorije kodova, pokazujući kako kombinatorne metode pomažu u njihovoj analizi i konstrukciji. Učenicima objasniti i značenje teorema o egzistenciji kombinatornih konfiguracija, te ih usmjeriti na primjenu funkcije generatriše i drugih metoda za dokazivanje postojanja i brojanje takvih konfiguracija. Preporučuje se korištenje vizuelnih i interaktivnih alata, kao i grupni rad na konkretnim problemima, kako bi učenici bolje razumjeli apstraktne pojmove i njihove primjene u kombinatorici.	
D.IV.2. Analizira osnovne pojmove teorije grafa.	• Razumije pojam grafa, uključujući vrhove, ivice i relacije među njima. • Razlikuje osnovne tipove grafova: obični graf, digraf, multigraf, težinski graf. • Tumači i koristi matricu susjedstva za predstavljanje grafa. • Prepoznaje i analizira elementarne i kružne puteve u grafu. • Objasnjava i razlikuje pojmove stabla i šume, te analizira njihove osobine. • Prepoznaje i upoređuje izomorfne grafove. • Primjenjuje grafove u rješavanju jednostavnih problemskih zadataka i modelovanju odnosa.

Poveznice sa ZJNPP	MTP-4.1.1.
Ključni sadržaji	
- Pojam grafa. Razni tipovi grafa. - Digraf. Multigraf. Matrica susjedstva. Elementarni i kružni put. - Blok grafa. Kontura grafa. - Šuma i stablo grafa. - Izomorfizam grafa.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Jasno objasniti osnovne pojmove teorije grafa, uključujući definiciju grafa, vrhove, ivice i veze između njih. Prezентовati različite tipove grafova (usmjereni graf – digraf, multigraf) i njihove karakteristike koristeći primjere i vizualne prikaze. Obratiti pažnju na pojmove matrice susjedstva, elementarnih i kružnih puteva, te kako se oni koriste za opisivanje i analizu grafova. Posebno istaći važnost i primjenu struktura poput stabla i šume, objasnivši njihove osobine i razlike. Učenicima pružiti zadatke koji uključuju prepoznavanje i konstrukciju ovih grafova, kao i analizu njihovih svojstava, uključujući i pojam izomorfizma grafova. Preporučuje se korištenje grafičkih alata ili softvera za crtanje i analizu grafova, što može značajno pomoći vizualizaciji i razumijevanju.	
D.IV.3. Analizira osnovne pojmove teorije informacija i teorije igara.	• Analizira osnove teorije informacija i teorije igara. • Analizira matrične igre, kombinovane strategije i igre na grafovima.
Poveznice sa ZJNPP	MTP-2.1.4.
Ključni sadržaji	
- Shannonov problem o teoriji informacija i veza sa jednim šahovskim problemom. - Elementi teorije igara. - Matrične igre. - Kombinovane strategije. - Igre na grafovima.	
Preporuke za ostvarenje ishoda	
Predstaviti osnovne pojmove teorije informacija kroz primjer Shannonovog problema, ističući njegovu povezanost sa šahovskim problemima kao motivacijom za dalju analizu. Uvesti elemente teorije igara kao modela odlučivanja u sukobljenim ili saradničkim situacijama, fokusirajući se na matrične igre i njihove kombinovane strategije. Posebno objasniti igre na grafovima kao primjenu teorije igara u diskretnim strukturama, kroz konkretne primjere i zadatke koji razvijaju analitičko razmišljanje. Preporučuje se rad u grupama i korištenje računalnih alata za simulaciju igara, kako bi učenici bolje razumjeli dinamične aspekte strategija i ishoda.	

E/ UČENJE I PODUČAVANJE

Razvijanje konceptualnog znanja kao osnove za matematičko rasuđivanje

Učenje treba da bude osmišljeno tako da učenici uče matematiku sa razumijevanjem, aktivno gradeći nova znanja na osnovu iskustva i predznanja. Pri tome ih treba na izazovan način motivirati da samostalno istražuju i uče. Učenicima nije dovoljno pamtiti matematičke postupke i pojmove izolovano jedne od drugih. Naime, malo je vjerovatno da će ih učenici moći funkcionalno primijeniti ako ne razumiju širu sliku zašto nešto rade i kako su sadržaji povezani. Cilj bi trebao biti pomoći učenicima da izgrade bogate, međusobno povezane mreže znanja. Učenici bi trebali uočavati povezanost matematičkih ideja, umjesto da na njih gledaju kao zasebne i isključne ideje. Naprimjer, nastavnici bi trebali postavljati pitanja i iznositi probleme koji pomažu učenicima da vide kako su razlomci, decimalni brojevi i procenti povezani jedni s drugima. Suprotno tome bi bilo bavljenje razlomcima, decimalnim brojevima i procentima u odvojenim poglavljima i učenicima ne bi bila skrenuta pažnja na činjenicu da se oni često koriste kao različiti prikazi istih veličina. Radi ostvarivanja ovog cilja nužno je u nastavi dosljedno primjenjivati princip sistematičnosti i postupnosti (npr. od poznatog ka nepoznatom, od lakšeg ka težem, od jednostavnog ka složenom) te se pridržavati i drugih principa nastave matematike. Dublje razumijevanje se može podsticati i kroz iskustveno učenje, korištenje efektivnih vizualizacija i projekte smještene u autentične kontekste. Konačan rezultat kod učenika treba da bude takav da matematiku doživljavaju kao koherentno znanje, sastavljeno od međusobno povezanih pravila, postupaka i zakonitosti, primjenljivo u stvarnom životu.

Povezivanje znanja iz matematike i drugih obrazovnih područja

Učenici najbolje uče i bolje razumiju ono o čemu uče kada gradivo mogu povezati s prethodnim učenjem i/ili s različitim područjima učenja. Matematičku pismenost razvijamo upotrebom primjerenog izbora zadataka kroz povezivanje oblasti matematike sa sljedećim obrazovnim područjima:

Jezik i komunikacija

Matematika je razrađena mreža pojmova, tvrdnji i postupaka. Ona je i stalni napor da se postigne tačan iskaz u kojem se razvija sposobnost argumentovanja, raspravljanja, kritiziranja, prosuđivanja kao i unapređivanja jezičkog izražavanja. Učenici obrazlažu i dokazuju tvrdnje, narativno objašnjavaju rješenja problema, kreiraju matematičke časopise, itd.

Priroda i geografija

Matematička znanja su često preduvjet za proučavanje pojava i zakonitosti kako u prirodi tako i u raznim nastavnim predmetima kao što je npr. STEM grupa predmeta (Fizika, Hemija, Biologija, Geografija, Osnovi tehnike, Tehnička kultura, Informatika, Matematika). Kako bi planirali i organizovali putovanja, učenici će saznati na koji način su povezani razmjera na karti i stvarna udaljenost između tačaka, čitati koordinate mreže i pronalaziti mjesta na karti pomoću geografske širine i dužine i sl. Istražiti vrijeme trajanja raspada određenih radioaktivnih elemenata, veličinu bakterija i virusa koristeći negativne eksponente, tačku ključanja i

smrzavanja tekućina i/ili čvrstih tvari, temperature planeta i udaljenost između njih su samo neki od zadataka u kojima matematika nalazi primjenu u ovom području.

Zdravlje i sport

Neki zdravstveni i sportski fenomeni mogu se opisati koristeći se matematičkim jezikom i tako približiti učenicima. Matematika pomaže razumjeti kako ljudsko tijelo funkcionira i šta ga održava zdravim kroz mjere u ishrani, proporcije tijela, stope cijepljenja, itd. Može se i stimulirati iznalaženje vlastitih rješenja kroz pitanja npr. kako Pitagorinu teoremu može pomoći u penjanju, koliko roniocu traje boca sa kiseonikom na dubini od 20 m, itd.

Nove tehnologije i digitalizacija

Nove tehnologije i digitalni alati omogućavaju novi pristup matematičkim terminima i procesima. Primjena računara može biti korisna u sljedećim situacijama: kada se koriste za računanje, vježbu i praktični rad te provjeru rezultata, kada smanjuju kognitivno „opterećenje“ učenika kako bi se oni mogli posvetiti drugim, višim matematičkim pojmovima i kada se koriste u pedagoške svrhe u kojima trebaju biti važan dio procesa učenja i podučavanja.

Kreativnost i dizajn

Matematika kao stroga deduktivna nauka ima i svoju induktivnu stranu. Eksperimentisanjem sa novim zadacima, iznalaženju mogućih rješenja učenici se osposobljavaju da razmišljaju i djeluju na originalan i kreativan način. Koristeći se modelima raznih geometrijskih oblika učenici mogu praviti replike poznatih svjetskih građevina i/ili sklapati sopstvene.

Ljudi i društvo

Učenici se povezuju sa društvom u kojem žive, zapažaju, analiziraju i stvaraju sopstveno mišljenje. Matematika igra važnu ulogu u mnogim područjima života kao što su finansije, medicina, sociologija i sl.

Integracija matematike u različita područja utiče da učenici razmišljaju o „stvarnom svijetu“ i o tome zašto se stvari događaju, pružajući im praktičan pristup učenju i korištenju matematike čineći je zabavnom i zanimljivom. Time učenici stiču širinu i spoznaju značaj primjene matematike, što im omogućava razvoj novih ideja i vještina, te produbljivanje postojećih.

Nastavne metode koje podstiču motivaciju učenika

Podučavanje matematike treba da podstiče motivaciju učenika za aktivno učestvovanje u procesu učenja. Ukoliko su nastavne metode i zadaci zanimljive, raznovrsne i povezane sa svakodnevnim životom kao i sa iskustvima iz drugih nastavnih predmeta, one će uticati na pozitivne stavove prema matematici. Učenje i podučavanje se moraju odvijati u stimulativnom okruženju, odnosno okruženju u kojem će učenici slobodno iznositi svoje vlastito mišljenje te u kojem će se njihove ideje cijeniti i vrednovati. Učenje i podučavanje treba biti bazirano na problemskom učenju, gdje će se problemi sa kojima se učenici susreću koristiti kao sredstva sticanja traženog znanja odnosno, istraživačkom radu u kojem se problemi vežu za učeničke interese čime će se povećati njihova motivacija, aktivnom učenju koje učenike podstiče na učenje kroz rasprave, projektni rad koristeći se npr. eTwinning platformom, vježbe i druge

načine koji im pomažu u promišljanju i objašnjavanju vlastitog procesa učenja matematike. Aktivno učenje i kritičko mišljenje se mogu navesti kao primjeri dobre prakse za razvijanje „komuniciranja u matematici“ kao jedne od predmetno specifičnih kompetencija. Da bi nastava matematike bila djelotvorna i zanimljiva koristiti se kooperativnim ili aktivnim nastavnim metodama npr. KWL tabela, Slagalice, Misli–spari–razmijeni, Mapa uma, Aktiviranje učeničkih iskustava, Poveži s drugim predmetima, Promijeni pristup, INSERT (Interactive Noting System for Effective Reading and Thinking) i dr.

Radi postizanja viših nivoa ishoda iz matematike u gimnazijskom obrazovanju, preporučuje se organizacija vanučioničke (terenske) nastave u svakom razredu gimnazije kroz posjete institucijama poput Prirodno-matematičkog fakulteta i drugih fakulteta na kojim se izučava matematika, Zavoda za statistiku, meteoroloških centara, geodetskih i kartografskih ustanova, banaka, kao i tehnoloških firmi i start-upova gdje se matematičko znanje primjenjuje u realnom kontekstu, čime se učenicima omogućava dublje razumijevanje i povezivanje teorijskih sadržaja sa svakodnevnim i profesionalnim situacijama.

Razlike u osnovnoškolskom i gimnazijskom pristupu nastavi matematike

Induktivni pristup podučavanja matematike dominira u razrednoj nastavi, dok se u predmetnoj nastavi osnovne škole koristi kombinacija induktivnog i deduktivnog pristupa podučavanja. Nasuprot njima u srednjoj školi je zastupljen deduktivni pristup, čime se srednjoškolsko podučavanje nastavnog predmeta „približava“ matematici kao nauci.

Idući od 1. razreda osnovne škole prema 4. razredu srednje škole od učenika se očekuje sve veća samostalnost u radu i ozbiljnost u pristupu matematičkim sadržajima, te sve veća sposobnost logičkog mišljenja i optimalnog rješavanja problema kako školskih, tako i onih iz svakodnevnog života. Treba imati na umu da moderno doba donosi nove izazove, te da su stariji učenici zahtjevniji i žele konkretne i zanimljivije primjere na nastavi.

Pri rješavanju zadataka u nižim razredima učenici u savremenoj nastavi matematike, modeliraju problemske situacije koristeći se konkretnim materijalima, crtežima ili dijagramima dok u višim razredima koriste apstraktne matematičke forme.

Individualizacija i diferencijacija nastavnog procesa

U idealnim uslovima nastavnici dopiru do svih svojih učenika pružajući cijelom odjeljenju odgovarajuće iskustvo. No, realno, svi učenici su različiti i svako uči vlastitim tempom, što zahtijeva prilagodbu nastave, odnosno diferencijaciju i individualizaciju nastavnog procesa. Diferencirani oblik nastave treba koristiti za podučavanja grupe učenika. Pri tome je vrlo važno da su grupe fleksibilne, odnosno da nisu isti učenici u istoj grupi za svaku aktivnost ili zadatak.

Individualizovana nastava usmjerena je na potrebe pojedinog učenika, stoga je ovaj vid podučavanja specifičan. Da bi se nastavni ciljevi i zadaci mogli primijeniti u okviru individualizovane nastave, oni moraju biti jasni i korisni onima koji rade na njihovom postignuću i moraju biti u skladu s jednom od taksonomija. Ovaj vid nastave može se koristiti samostalno ili može biti dio diferencirane nastave.

Individualizovana nastava je korisna kod podučavanja učenika s posebnim potrebama. Pod tim pojmom najčešće podrazumijevamo učenike s teškoćama u razvoju, ali bitno je napomenuti da tu spadaju i nadareni učenici. Pripremanjem programa i materijala, učitelj/nastavnik se rukovodi potrebama učenika i dalje otkriva kome i na koji način prilagoditi nastavni proces.

Kod učenika s teškoćama u razvoju bitno je ustanoviti nivo kognitivnih procesa potrebnih za praćenje nastave matematike. Nakon opservacije, a u saradnji sa pedagoško/psihološkom službom pravi se individualizovani obrazovni program prilagođen svakom pojedinom učeniku.

Matematika ima širinu koja omogućava da se u okviru svake nastavne jedinice može izdvojiti dio koji učenik može shvatiti i savladati u okviru svojih mogućnosti. Nekim učenicima više odgovara rad koji uključuje geometrijske oblike i pravila, dok se drugi bolje snalaze sa brojevima. Matematika omogućava korespodenciju između takvih, naoko različitih formi, te omogućava učeniku da pojmi i poveže stvari za koje nije mislio da je moguće. Također je važna i vizuelizacija i slikovni prikaz, kako problema koji rješavamo, tako i dijelova novog gradiva.

F/ VREDNOVANJE U PREDMETNOM KURIKULUMU

Vrednovanje

Vrednovanje je sistematično i kontinuirano prikupljanje podataka u procesu učenja i podrazumijeva utvrđivanje nivoa ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda definisanih kurikulumom. Koristi se za gradiranje uspjeha učenika ali i kako bi im se pomoglo da poboljšaju uspjeh. Prilikom planiranja vrednovanja učeničkih postignuća nužno je uvažiti odgojno-obrazovne ishode i ciljeve predmeta.

Cijeli proces vrednovanja moraju pratiti i odgovarajuće metode podučavanja, što znači da sve mora biti međusobno usklađeno. Loš primjer bi bio da se prema nekom odgojno-obrazovnom ishodu očekuje da učenik može nešto analizirati, a da prilikom vrednovanja koristimo zadatke koji očekuju činjenično znanje.

Vrednovanje uključuje proces praćenje napredovanja, provjeravanja i ocjenjivanja ostvarenosti planiranih odgojno-obrazovnih ishoda. Praćenje obuhvaća sistemsko uočavanje, bilježenje i zapažanje o učenikovu radu i napredovanje u ostvarivanju planiranih odgojno-obrazovnih ishoda. Provjeravanje je mjerenje postignutog nivoa znanja iz matematike u školskom i izvanškolskom radu. Ocjenjivanje najčešće podrazumijeva brojanu ili opisnu ocjenu na kraju perioda učenja. Potrebno je kontinuirano voditi evidenciju o nivou postignuća učenika. Svrha vrednovanja je da se utvrdi u kojoj mjeri su ostvareni odgojno-obrazovni ishodi učenja, odnosno da se utvrdi nivo obrazovnih postignuća učenika.

Oblici vrednovanja znanja, vještina i stavova učenika, s obzirom na osobu/instituciju koja provodi vrednovanje, mogu biti:

- vanjsko (eksterno) vrednovanje (npr. matura, PISA, TIMSS),
- unutrašnje (interno) vrednovanje (npr. NZOT),
- samovrednovanje,
- vršnjačko vrednovanje.

S obzirom na svrhu vrednovanja razlikujemo:

- dijagnostičko (inicijalni testovi npr. na početku školske godine),
- formativno (odvija se za vrijeme učenja i podučavanja, a rezultira kvalitativnom povratnom informacijom),
- sumativno (ukupno postignuće).

Prilikom donošenja odluke šta i kako treba vrednovati, potrebno je uzeti u obzir sljedeće:

- vrednovati šta učenik zna i kako razmišlja,
- ažurnost pisanja domaće zadaće,
- pratiti napredak učenika kao sastavni dio nastavnog procesa,
- postavljati zahtjeve koji traže poznavanje i povezivanje više matematičkih pojmova i postupaka,
- koristiti različite metode i postupke vrednovanja,
- uključivati i obavezne usmene odgovore i demonstraciju znanja pred tablom,
- pri rješavanju kompleksnih zahtjeva koristi različita pomoćna sredstva.

S druge strane, u ovom kontekstu potrebno je izbjegavati sljedeće:

- vrednovati šta učenik ne zna,
- postavljati zahtjeve koji traže primjenu samo jednog ili dva postupka,
- obraćati pažnju izolovanom poznavanju matematičkih pojmova i postupaka,
- koristiti isključivo pisane zadatke i testove,
- vrednovati broj tačno riješenih zadataka na pismenom ili broj tačnih odgovora na testu sa isključivim ciljem da se učeniku dodijeli brojčana ocjena,
- ograničavati korištenje pomoćnih sredstava.

Vrednovanje je neodvojivo od svih aktivnosti koje nastavnik izvodi u učionici. Učinkovito vrednovanje podrazumijeva prikupljanje raznovrsnih informacija do kojih se dolazi u svim fazama učenja i podučavanja, kao i samovrednovanje učenika i vršnjačko vrednovanje, koji su važan segment formativnog vrednovanja. Učenici sami vrednuju svoj rad, prepoznaju greške, odlučuju kako trebaju dalje učiti i sl. Vještina samovrednovanja se razvija tako što nastavnici aktivno uključuju učenike u proces vrednovanja tako što će vrednovati određene zadatke, prezentacije i sl. kako svoje tako i svojih kolega. Učenicima treba jasno objasniti šta se vrednuje u okviru nastavnog predmeta Matematika. Osnovu za vrednovanje čine ciljevi i odgovarajući odgojno-obrazovni ishodi. Za svaki element treba dati obrazloženje kako se vrednuje.

Elementi vrednovanja

Vrednovanje uključuje uravnoteženost upotrebe svih pristupa: dijagnostičkog, formativnog i sumativnog. Usmjereno je ka učenju, razvoju i jačanju učeničkog samopouzdanja te prema njegovanju matematičkih kompetencija. Shodno navedenom, učenička postignuća treba vrednovati kroz sljedeće elemente:

1. Razumijevanje matematičkih pojmova, postupaka i tvrdnji;
Vrednuje se činjenično znanje, razumijevanje pojmova i tvrdnji, analiziranje i ispravno korištenje pravila.
2. Komuniciranje u matematici;
Vrednuje se upotreba matematičkih simbola u usmenom i pismenom izražavanju, organizovanje informacije u logičnu cjelinu, predstavljanje podataka koristeći se različitim prikazima, verbalno izražavanje u toku razrednih rasprava koje pomažu razumijevanju, razmjeni ideja, strategija i rješenja.
3. Rješavanje problemskih situacija;
Vrednuje se analiziranje problema, logičko razmišljanje i zaključivanje, modeliranje problemske situacije matematičkim zakonitostima, uspješna primjena odgovarajuće metode za rješavanje problema te provjera rješenja.
4. Vrednovanje učeničkog rada;
Vrednuje se učenički uradak u pogledu estetskog i praktičnog rada, grafičkog prikaza, primjena materijala, alata, instrumenata i drugih pomagala.

Metode vrednovanja

Postoji usmeno i pismeno provjeravanje znanja, a pismene provjere mogu imati pitanja otvorenog tipa i pitanja zatvorenog tipa. Kod pismenih provjera, rezultate je moguće interpretirati na dva načina: kriterijski (unaprijed utvrđeni standardi i kriteriji) i normativno

(postignuća učenika procjenjuju se na osnovu postignuća drugih učenika, a ne govori se o stvarnom znanju učenika). Osim pismenog i usmenog provjeravanja znanja, moguće je koristiti i neke druge vidove provjere znanja: projekti (koji nastaju kao rezultat projektne nastave), prezentacije (koje nastaju kao rezultat istraživanja određenih tema), učenički portfoliji (koji nastaju kao zbirka svih materijala na kojim je učenik radio), itd.

Nastavnik sam kreira svoj način vrednovanja tako da on bude u skladu sa odgojno-obrazovnim ishodima učenja, korištenim metodama i strategijama podučavanja. Pitanje/problem za provjeru znanja treba odražavati nivo odgojno-obrazovnih ishoda, što znači da su glagoli iz odgojno-obrazovnog ishoda smjernica za izbor sadržaja. Posebno treba biti oprezan kod kreiranja zadataka za mjerenje viših nivoa kognitivnih procesa i znanja. Ishode učenja trebaju pratiti odgovarajući kriteriji vrednovanja prema kojima možemo utvrditi da li su ostvareni.

Osim davanja brojčane ocjene, veoma je važno učenicima dati i povratnu informaciju o njihovim postignućima koja uz osvrt na određeni odgojno-obrazovni ishod ističe kako je vrednovanje izvršeno, šta je učenik odlično uradio, na čemu treba raditi i kako će postići uspjeh u tom segmentu/procesu. Kvalitetna povratna informacija omogućava učenicima da svjesno utiču na određene segmente svog učenja, te tako poprave uspjeh. Učenici također prate i regulišu svoje učenje, služe se metodama samovrednovanja i vršnjačkog vrednovanja pomoću rubrika, lista samoprocjene i/ili dnevnika učenja, pri čemu mogu procjenjivati svoje učenje pomoću istih kriterija kao i nastavnici. U nastavi Matematike u svrhu formativnog vrednovanja koriste se tablice organizovane u četiri dimenzije (četiri elementa ili kriterija vrednovanja): razumijevanje matematičkih pojmova, postupaka i tvrdnji, komuniciranje u matematici, rješavanje problemskih situacija, te vrednovanje učeničkog rada pri čemu se kvaliteta ostvarenih ishoda učenja vrednuje u četiri nivoa: napredni, srednji, osnovni nivo i potrebna podrška.

G/ PROFIL I STRUČNA SPREMA NASTAVNIKA

Nastavu iz Odabranih oblasti matematike mogu izvoditi nastavnici koji su završili:

- Prirodno-matematički fakultet (nastavnički smjer), grupa Matematika ili grupa gdje je matematika glavni ili ravnopravni predmet u dvopredmetnoj grupi, ako je naznačeno u diplomi ili drugoj javnoj ispravi.
- Filozofski fakultet, grupa Matematika ili grupa Matematika-fizika ili grupa Matematika u dvopredmetnoj grupi, ako je to naznačeno u diplomi ili u drugoj javnoj ispravi.
- Odgovarajući četverogodišnji studij i stekla zvanje:
 - profesor matematike,
 - profesor matematike s fizikom,
 - profesor matematike i informatike,
 - matematika - opći smjer primijenjene matematike - diplomirani matematičar sa položenom pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičkom grupom predmeta,
 - matematika - opći smjer teorijske matematike - diplomirani matematičar sa položenom pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičkom grupom predmeta,
 - matematika - opći smjer matematike i teorijske kompjuterske nauke - diplomirani matematičar i informatičar sa položenom pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičkom grupom predmeta.
- II (drugi) ciklus odgovarajućeg studija visokog obrazovanja (diplomski studij), sa akademskom titulom i stručnim zvanjem magistra za određenu oblast kojim stječe 300 ECTS bodova.

Ukoliko lice iz prethodnog stava u toku studija nije polagalo ispit iz pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičke grupe predmeta, dužno je ove ispite položiti u roku od godine dana od dana stupanja na posao.

